# משפט

נתבונן במ.מ.ל(מערכת משוואות לינארית) עם מטריצה מצומצמת בצורה מדורגת. נניח שהמערכת היא קונסיסטנטית – כלומר אין סתירה פנימית, כלומר אין משוואות מהצורה

יהיו משתנים החופשיים

לכל r סקאלרים בשדה קיים פתרון יחיד למערכת כך ש

## הוכחה

נתבונן במשוואה האחרונה הלא מנוונת. ממנה נחשב ערך למשתנה המוביל האחרון(כלומר עם אינדקס הכי גבוה) ונעבור למשוואה עם אינדקס יותר נמוך. בכל שלב תמיד אפשר לחשב ערך של המשתנה המוביל התורן בגלל שיודעים הערכים של כל המשתנים החפשיים והערכים של המשתנים המובילים עם אינדקסים יותר גבוהים.

# משפט

כל מ.מ.ל שקולה למערכת בצורה מדורגת(כלומר מערכת עם מטריצה מצומצמת מדורגת)

תזכורת: הכוונה ב"שקולה" היא שלכל מ.מ.ל קיימת מערכת מדורת עם אותם הפתרונות

פעולות אלמנטריות על מ.מ.ל

1. החלפת סדר המשוואות:
2. כפל של המשוואה בסקאלר :
3. חיבור של שתי משוואות:

# משפט

פעולות אלמנטריות מעבירות מערכת משוואות לינארית לשקולה

## הוכחה

כל פעולה אלמנטרית היא הפיכה, והיא לא מפילה ולא מייצרת פתרונות.

# משפט

לכל מערכת משוואות לינארית קיימת סדרה(לא יחידה) של פעולות אלמנטריות שהופכת אותה למערכת מדורגת.

## תוצאה

כל מ.מ.ל שקולה למערכת מדורגת.

## הערה

לכל מערכת משוואות לינארית() יש יותר ממערכת מדורגת אחת שקולה לה.

## הוכחה: אלגוריתם הדירוג של גאוס

אלגוריתם הדירוג של גאוס

1. נבחר את העמודה הראשונה השונה מאפס(כלומר קיים בה לפחות איבר אחד שונה מאפס)(מחפשים רק בחלק המצומצם) נקרא לה עמודה.
2. נחליף שורות(אם צריך) כך שהאיבר הזה יהיה בשורה הראשונה – כלומר
3. בעזרת איבר מוביל נאפס את כל האיברים בעמודה מתחת לשורה הראשונה. לכל שורה נבצע
4. חוזרים על פעולת 1,2,3 על תת מטריצה עם השורות   
   בגלל שבתת מטריצה יש פחות שורות לאלגוריתם יש סוף.  
   הערה: לא מדרגים את הקבועים החופשיים

כשלא מוצאים עוד איברים שונים מאפס אפשר לסיים את התהליך

# תוצאה

למערכת משוואות לינארית:

* או שאין פתרונות – אם ורק אם לצורה מדורגת שלה יש שורה
* או שיש לה פתרון יחיד – אם ורק אם לצורה מדורגת אין סתירה פנימית ואין משתנים חופשיים.
* יותר מפתרון אחד – אם ורק אם לצורה מדורגת אין סתירה פנימית ויש משתנה חופשי אחד לפחות.  
  הערה: אם הוא אינסופי אזי יש אינסוף פתרונות, ואם הוא סופי אזי יש מספר סופי של פתרונות גדול מ1

צורה מדורגת קנונית

# הגדרה

מטריצה נקראת מדורגת קנונית אם:

היא מדורגת(תזכורת – הצורה המצומצמת מדורגת)

וכל איבר מוביל הוא 1

וכל איבר מוביל הוא האיבר היחיד השונה מ0 בעמודה שלו

# משפט

לכל מטריצה קיימת מטריצה יחידה המדורגת קנונית שקולה לה.

# תרגיל

כל מטריצה מדורגת אפשר לדרג עד לצורה מדורגת קנונית ע"י פעולות אלמנטריות